Μαθημα 7º

19/11/2018

ΑΕΣΔΕ

Περιοχη Απολυτης Ευσταθειας

Ορισμος

Μια αριθμητικη μεθοδος για την επιλυση του ΠΑΤ:

$$(1)\quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , t \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

λεγεται απολυτα ευσταθης για $h>0$.

Αν οταν εφαρμοστει το Προβλημα Δοκιμης:

$$(2)\quad \begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & , t \in [0, +\infty) \quad , \lambda \in \mathbb{C} \quad , Re(\lambda) < 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

τοτε δινει προσεγγισεις y^n, $n = 1, 2, \ldots$ που παραμενουν φραγμενες καθως το $n \to +\infty$

Η περιοχη S του μιγαδικου επιπεδου, που η μεθοδος ειναι απολυτα ευσταθης, αν $\lambda h \in S$ λεγεται <u>περιοχη απολυτης ευσταθειας</u> της μεθοδου

■ <u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

Η αμεση Euler ειχε περιοχη απολυτης ευσταθειας $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda h \in [-2, 0]$ (θα εχουμε κυκλικο δισκο)

▸ Στην περιπτωση των μονοβηματικων μεθοδων, οπως η αμεση Euler οι προσεγγισεις $(y^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ παραμενουν φραγμενες για το προβλημα δοκιμης λh και μαλιστα ισχυει οτι:

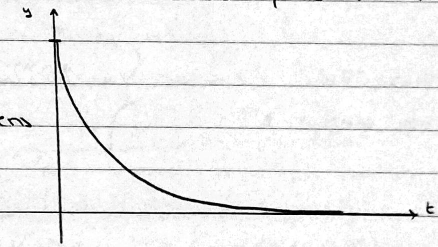
$$|y^{n+1}| \le |y^n|$$

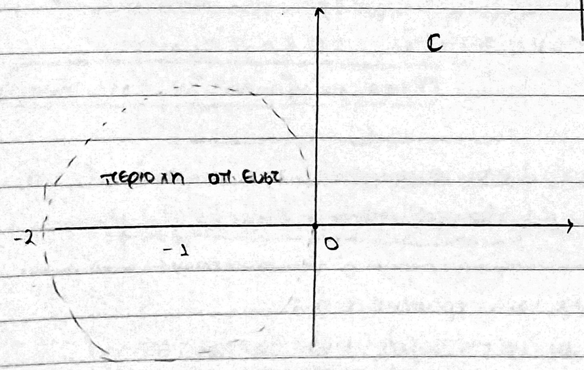
Για το πρ. δοκιμης: $y^n = (1+\lambda h)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, για να εχω παρομοια συμπεριφορα με την αναλυτικη λυση θα πρεπει $|1+\lambda h| \le 1$

αν $z = \lambda h$ τοτε κυκλικο δισκο

$S = \{ z \in \mathbb{C} : |1+z| \le 1 \}$

Αρα σχηματικα η περιοχη απολυτης ευσταθειας ειναι:





αν βγουμε εκτος κυκλου τοτε δεν εχουμε περιοχη απολυτης ευσταθειας

Θέλω μεγάλο σφάλμα για να έχω καλύτερη προσέγγιση

Μπορεί να μου πει να εφαρμόσω κώδικα για την πεπλεγμένη Euler

Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της Euler

Πλεον.
1) Απλή μέθοδος για να εφαρμοστεί, εφόσον είναι μονοβηματική
2) Άμεση μέθοδος [καταλήγω σε μια εύκολη επαναληπτική διαδικασία]
3) Χρειάζεται μόνο 1 συναρτησιακό υπολογισμό σε κάθε βήμα υπολογισμός της f μια φορά

Μειον.
4) Σχετικά μικρό ολικό σφάλμα της Euler, τάξης 1, οδηγεί σε μικρό βήμα h, το μικρό βήμα οδηγεί σε μεγάλο σφάλμα συσσώρευσης.
5) Μικρή περιοχή ευστάθειας

Στην άμεση Euler πάω με εμπρόσθιες π.δ

Πεπλεγμένη Μέθοδος Euler

ΠΑΤ $\begin{cases} y' = f(t, y(t)) & , t \in [a, b] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

Θέλω από το συνεχές ΠΑΤ να πάω στο διακριτό με οπισθίες πεπερασμένες διαφορές

Οπισθίες π.δ
Απλ στο σημείο t^{n+1}

$$\begin{cases} \dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} = f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) \\ y(t^0) = y^0 = y_0 \end{cases}$$

Συμβ: Προσεγ. λύσης

Συμβ. Αναλ. λύσης

$\Leftrightarrow \; y(t^{n+1}) = y(t^n) + h f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) \xRightarrow{y(t^{n+1}) = y^{n+1}}$

$\left\{ y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}) \right\}$

Πρέπει να εξασφαλίσω Υ+Μ λύσης

όταν είναι γραμμική παίρνω και πολλαπλότητα λύσης

$Ay = b$

$y' = y^0 - \dfrac{F(t^0)}{J(t^0)}$ Μέθοδος Newton (να την ψάξω) Μεθ βελτιστοποίησης — μου κάνει γραμμικοποίηση

όταν χρησιμοποιώ 1ης τάξης πληροφορία τότε έχω γραμμικοποίηση

$F(t^0) = (F_1(t^0), F_2(t^0), \quad , F_N(t^0))$

$$J(t^0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

- **Παρατηρηση**

Εστω οτι η f ικανοποιει την συνθηκη Lipschitz. Τοτε για $h>0$ αρκετα μικρο τ.ω. $Lh<1$ οριζουμε την συναρτηση

$g(x) = y^n + hf(t^{n+1}, x)$, $x \in \mathbb{R}$ λυση στο σημειο t^{n+1}

οποτε για $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$, $g(x) - g(\tilde{x}) = h[f(t^{n+1}, x) - f(t^{n+1}, \tilde{x})] \overset{f:\,Lip}{\Rightarrow}$
$|g(x) - g(\tilde{x})| = h|f(t^{n+1}, x) - f(t^{n+1}, \tilde{x})| \leq Lh|x - \tilde{x}|$, αφου $Lh<1$
Δηλαδη $|x - \tilde{x}| \cdot Lh < |x - \tilde{x}|$, αρα η g ειναι συστολη και γνωριζουμε οτι εχει μοναδικο σταθερο σημειο , το y^{n+1}

- Η συστολη μικραινει τα μηκη μου

f συνεχης + συστολη τοτε ξερω οτι θα εχω μοναδικη λυση

Με τις πεπλεγμενες συναρτησεις δεν μπορω να εχω παντα μοναδικη λυση αλλα μπορει να εχω πολλες για αυτο χρησιμοποιω τη συστολη για την μοναδικοτητα

- **Συνεπεια της πεπλεγμενης Euler**

$$y^{n+1} = y^n + h\underbrace{f(t^{n+1}, y^{n+1})}_{y'(t^{n+1})} + O(h^2) \quad , \quad \underbrace{\frac{h^2}{2} y''(\xi^n)}_{\delta^n} \quad , \quad \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

ομοια με Euler

- **Ευσταθεια της πεπλεγμενης Euler**

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + hf(t^{n+1}, z^{n+1}) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

Οριζω τη διαφορα $\varepsilon^n = y^n - z^n$

$\varepsilon^{n+1} = y^{n+1} - z^{n+1} = \varepsilon^n + h\left[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})\right] \Rightarrow$

$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + h\,|f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})| \le$

$\le |\varepsilon^n| + hL\,|y^{n+1} - z^{n-1}| = |e^n| + hL \cdot |\varepsilon^{n+1}| \Rightarrow$

$(1 - Lh)\,|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| \Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le \frac{1}{1-hL}\,|\varepsilon^n|$

⊛ Δεν παιρνω $hL=1$ γιατι θα απειριζεται το κλασμα και δεν θα εχω φραξιμο ⊛

Υποθετω οτι αν $Lh \le \frac{1}{2}$ τοτε $\frac{1}{1-Lh} \le 1 + 2Lh$

> 1 αρα αυξανει το σφαλμα

Τοτε $|\varepsilon^{n+1}| \le (1+2Lh)\,|\varepsilon^n| \overset{⊛}{\le} e^{2Lh}\,|\varepsilon^n|$

Θελω νδο $|\varepsilon^n| \le C\,|\varepsilon^0|$ οπου C εξαρταται απο L, $b-a$

Επαγωγικα $|\varepsilon^n| \le (1+2hL)^n\,|\varepsilon^0| \le e^{2Lhn}\,|\varepsilon^0| \Rightarrow$

$\max\limits_{0 \le n \le N} |\varepsilon^n| \le e^{2L(b-a)}\,|\varepsilon^0|$ οποτε η μεθοδος ευσταθης

⊛ Ειναι οι δυο πρωτοι οροι της δυναμοσειρας του e^x

- Περιοριζομαι με $Lh \le \frac{1}{2}$ γιατι θελω να πετυχω συστολη και οχι διαστολη
- Ευσταθεια σημαινει οτι παιρναμε σφαλματα τα οποια θελουμε συνεχως να μικραινουν, μικρα σφαλματα αρα θελω συναρτηση σφαλματος να ειναι συστολη.

▸ <u>Συμπερασμα</u>: καταληγω σε παρομοιο αποτελεσμα με την αμεση Euler με διαφορα στη σταθερα C οτι ειναι λιγο μεγαλυτερη και εξαρταται απο τα δεδομενα (f, διαστημα, αρχικα δεδομενα) και οχι απο το βημα

- <u>Περιοχη απολυτης ευσταθειας</u>

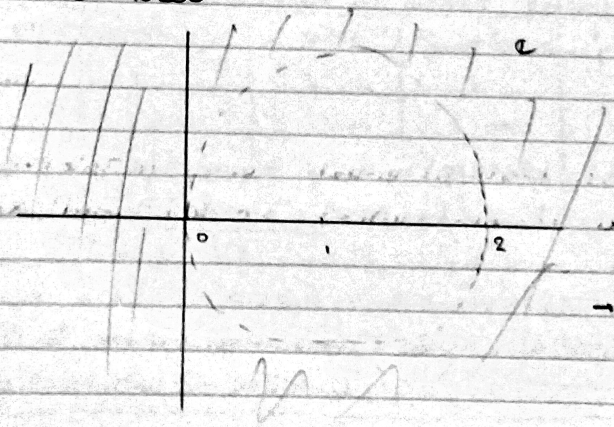
$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \ Re(\lambda) < 0$$

Αναλυτικη λυση: $y = e^{\lambda t}$ οπου φθινει εκθετικα με το χρονο

Πεπλεγμενη Euler: $y^n = \frac{1}{(1-\lambda h)^n} y^0$, $n \in \mathbb{N}^*$

Αρα η περιοχη απολυτης ευσταθειας $|1-\lambda h| \geq 1$,
εαν το $\lambda h \in \mathbb{C}$ και ονομαζω $z = \lambda h$ τοτε
$S = \{ z \in \mathbb{C} : |1-z| \geq 1 \}$

Αφου το $|1-z| = 1$ ειναι κυκλος κεντρου 1, ακτινας 1 τοτε η περιοχη απολυτης ευσταθειας ειναι αυτη εκτος του κυκλου δισκου



→ $\lambda h \in [0, 2]$ τοτε απ. ασταθη

→ $\lambda h \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ τοτε απ. ευσταθη

Μεγαλυτερο βημα → Λιγες Πραξεις → Μικροτερο Σφαλμα → Μικροτερο Σφ. λυσ

Καλυτερη ειναι η περιοχη απ. ευσταθειας στην πεπλεγμενη Euler παρα στην αμεση Euler

Ακρίβεια της πεπλεγμένης Euler

Η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz και για $h>0$ με $Lh \leq \frac{1}{2}$ αποδ. ότι: $\|E^h\|_\infty = \max_n |y(t^n) - y^n| \leq Ch$

με $C = \frac{M}{2L}\left(e^{2L(b-a)} - 1\right)$, $M = \max_{t\in[a,b]} |y''(t)|$